Pour une culture mathématique dès l'école primaire

Roland Charnay¹ Membre du groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire²

Les nouveaux programmes de l'école primaire sont marqués par quelques innovations majeures. A côté de la généralisation de l'enseignement des langues étrangères ou régionales et du caractère transversal donné au travail dans les domaines « maîtrise du langage et de la langue française » et « éducation civique », c'est la dimension culturelle qui marque l'inflexion majeure pour l'ensemble des disciplines.

Quelle culture mathématique?

Tout le monde s'accordera pour prôner l'accès à une culture mathématique solide pour les jeunes enfants de l'école primaire. La difficulté réside dans la caractérisation de cette culture mathématique. Certains souligneront la place importante donnée aux activités de résolution de problèmes et les exigences affirmées dans ce domaine comme signe d'une volonté de renforcer cette culture mathématique, inscrite au cycle 3, dans le cadre de l'éducation scientifique aux côtés des sciences expérimentales et de la technologie. D'autres avanceront, au contraire, que ces programmes marquent une régression de la culture mathématique des élèves marquée par la disparition de certains contenus comme la notion de quotient décimal.

Essayons de préciser quelques termes du débat, et, en même temps, de souligner quelques unes des réflexions qui ont guidé les choix faits à l'occasion de l'élaboration de ces programmes, en ne masquant pas les questions qui restent ouvertes.

Parmi les différents sens du mot *culture*, retenons celui-ci proposé par Le Robert : « Ensemble des connaissances acquises qui permettent de développer le sens critique, le goût, le jugement ». Au-delà des connaissances indispensables aux individus pour leur commerce ordinaire (se débrouiller dans la vie courante), pour prétendre à la dimension culturelle, l'enseignement des mathématiques se doit donc d'envisager d'autres enjeux :

- fournir aux élèves les outils intellectuels utiles au citoyen pour appréhender, de façon critique, les informations et les propositions qui lui sont soumises (mettre en relation, ordonner, hiérarchiser, relativiser...);
- montrer aux élèves que les mathématiques peuvent être considérées comme une science (science des quantités, de l'espace ordinaire, des formes et des grandeurs pour ce qui relève de l'école primaire) dont les concepts ont une applicabilité très large, dans de nombreux domaines (sciences expérimentales, géographie...);
- initier, très tôt, les élèves à la façon spécifique dont les mathématiques envisagent le rapport au *vrai* et au *faux*, soit en s'appuyant sur leur rapport au « réel » (la formule 4 + 3 = 7 est vraie parce qu'elle peut être mise en relation avec des opérations sur les quantités ou les grandeurs), soit en ayant recours à la puissance du raisonnement appuyé sur des connaissances assurées (la formule 4 + 3 = 7 est vraie parce que c'est un de plus que 3 + 3 que je sais être égal à 6), dans tous les cas en se dégageant de l'argument d'autorité;

¹ Roland Charnay est également l'un des responsables de l'équipe ERMEL (INRP), formateur à l'IUFM de Lyon et auteur de « Pourquoi des mathématiques à l'école ? » (éditions ESF)

.

² Merci à Catherine Houdement, Jean Fromentin et Georges Combier pour leur relecture attentive et leurs conseils précieux.

- initier à une première pratique de l'activité mathématique, caractérisée à la fois par le goût du questionnement, de la recherche, de l'investigation, mais aussi par la nécessité de structurer, d'organiser des connaissances, de les mettre en forme à l'aide d'un langage spécifique (notamment symbolique) et de prouver la vérité de ce qu'on affirme ;
- commencer, lorsque c'est possible, à situer les connaissances mathématiques dans une perspective historique pour les faire percevoir comme construction humaine.

Tout cela sans oublier que l'école primaire ne constitue qu'une première étape de l'école obligatoire : elle doit donc fournir les éléments indispensables à une scolarité prolongée réussie, dont les enjeux essentiels restent les mêmes. Sur l'exemple du calcul, cet article se propose de mettre en perspective quelques unes des orientations retenues lors de l'élaboration de ce nouveau programme pour l'école primaire.

Les « nouveautés » dans le domaine du calcul

La consultation des enseignants a largement montré à la fois l'approbation massive de la priorité affichée pour le calcul mental et la place donnée à la résolution de problèmes, mais aussi l'inquiétude soulevée par l'introduction des calculatrices dès le début de l'école primaire.

La question de l'enseignement du calcul apparaît, a priori, simple et pourrait être résumée de la façon suivante. D'abord, un constat : dans la société, l'usage des calculatrices et des ordinateurs s'est substitué à celui des techniques opératoires posées ; combien d'adultes, même lettrés, sont capables de calculer correctement un quotient et un reste corrects pour la division de 72,15 par 5,3 ? Suivi d'une évidence : le calcul mental demeure un calcul d'usage utile dans de nombreuses circonstances où il s'agit d'évaluer un ordre de grandeur, de contrôler le résultat affiché par une calculatrice (pour la division précédente, le quotient est compris entre 14 et 15). D'où une tentation forte : arrêter ou réduire fortement l'enseignement des techniques opératoires et recommander l'utilisation systématique des calculatrices pour tous les calculs qui ne peuvent pas être effectués mentalement.

Une telle décision serait pédagogiquement et culturellement inacceptable³. Mais il reste à trouver une nouvelle légitimation pour l'enseignement des techniques opératoires et à situer cet enseignement parmi les autres moyens de calcul dont nous disposons.

Un premier travail consiste à préciser ce que recouvrent des termes souvent confondus. Certaines réactions aux nouveaux programmes montrent une confusion entre calcul et techniques opératoires. On peut ainsi entendre que la soustraction n'est plus enseignée au cycle 2 (et donc que les élèves n'utilisent plus que l'addition dans les problèmes !). C'est évidemment une idée fausse. Au contraire, les programmes proposent d'introduire, dès le début du cycle 2, la soustraction en même temps que l'addition de façon notamment à éviter tout conditionnement sur l'utilisation de l'addition. Mais, la soustraction ayant été introduite, ayant du sens pour les élèves (un sens qui sera à compléter tout au long de la scolarité primaire), le choix des moyens de calcul reste large... et ouvert.

^

³ Il existe cependant de nombreux exemples de techniques dont l'usage est devenu obsolète et qui ne sont plus enseignées, sans que, pour autant les notions disparaissent des programmes. Les élèves connaissant la signification de la racine carrée, alors même que l'algorithme d'extraction de la racine carrée n'est plus enseigné.

La première affirmation forte des nouveaux programmes concerne le rôle et la place à donner au **calcul mental**. Sa pratique recouvre deux aspects.

Sans connaissance solide des résultats qui sont à la base de tout calcul (mental ou posé), et en particulier une connaissance approfondie des tables d'addition et de multiplication, rien n'est possible. Cette connaissance doit être complétée par la capacité à élaborer un résultat ou une valeur approchée de celui-ci (pour des calculs comme 450 + 150, 25×12 , 260 divisé par 4, $289 \times 7...$). C'est l'aspect « calcul réfléchi ou calcul raisonné » du calcul mental, lequel n'exclut pas le recours à l'écrit pour noter des étapes du calcul. Dans de nombreuses situations de la vie courante, cette pratique suffit pour prendre une décision. Le collège se doit de poursuivre ce travail nécessaire, notamment à propos de calculs sur les nombres décimaux ou avec les pourcentages.

Le calcul mental apporte également une aide précieuse à la résolution de problèmes numériques, dans la mesure où se ramener à la même situation plus simple avec des nombres plus familiers facilite souvent la reconnaissance de la démarche à mettre en œuvre. Dans ce sens, le travail en calcul mental ne doit pas être limité au calcul purement numérique. Il doit aussi être contextualisé dans des problèmes portant sur des quantités ou des grandeurs.

C'est aussi l'occasion d'une authentique activité mathématique dans laquelle les élèves peuvent faire preuve de créativité et développer leurs facultés de raisonnement. Que l'on songe, par exemple, aux différentes stratégies qui peuvent être utilisées pour calculer 247 + 53 ou 25 x 24. Outre que l'élaboration de ces stratégies s'appuie sur des connaissances solides explicites ou implicites (décomposition des nombres, tables, propriétés des opérations), elle suppose la mise en place de raisonnements, un travail de mémorisation et, lorsqu'elles ont à être explicitées, justifiées ou critiquées, l'utilisation du langage mathématique et le développement d'une argumentation.

Le calcul mental, dont la pratique a diminué au cours des années 70, doit retrouver une place essentielle, mais redéfinie, et permettre la mise en place de compétences mieux assurées que celles qui apparaissent aujourd'hui dans les évaluations à l'entrée au cycle 3 et à l'entrée en Sixième. Pour faire la transition avec le paragraphe suivant, on peut souligner le fait que les erreurs relevées dans le calcul posé de multiplication ou de division proviennent très fréquemment d'une maîtrise insuffisante des tables de multiplication, davantage que d'une non maîtrise de l'algorithme lui-même (en particulier dans le cas de la multiplication).

Venons en aux **techniques opératoires**, c'est-à-dire aux algorithmes usuels de calcul posé. Elles ne seront que faiblement utilisées par les futurs adultes que sont les élèves d'aujourd'hui. Là encore, l'approche « culturelle » permet de mieux cerner les « nouveaux objectifs » de leur enseignement.

Avant d'être automatisée (ce qui est nécessaire), une technique opératoire est d'abord un objet à comprendre. La comprendre, c'est lui donner du sens, c'est-à-dire en repérer les étapes et pouvoir expliquer ce qui se passe à chaque étape pour enfin savoir pourquoi, la mise en œuvre de ces différentes étapes permet d'aboutir au résultat final. La compréhension facilite à la fois la mémorisation et l'adaptation à des cas particuliers (0 intercalés, par exemple). Elle permet aussi la généralisation. Avoir compris le fonctionnement de la technique opératoire de l'addition sur des nombres de l'ordre de la centaine ou du millier permet, si c'est nécessaire, d'en étendre l'usage à des nombres plus grands, à des sommes comportant davantage de nombres ou au cas de l'addition de nombres exprimant des durées. Avoir compris le

fonctionnement de la multiplication de deux entiers aidera sans doute à comprendre, bien plus tard, le fonctionnement de la multiplication des polynômes, dans la mesure où elle s'appuie sur une bonne maîtrise de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ici la « culture mathématique des techniques opératoires » se trouve au moins autant dans cette compréhension que dans un entraînement vide de sens et de contenu. Expliquer, justifier sont, là encore, au cœur des enjeux.

On peut ajouter qu'une technique opératoire est un bel exemple d'objet culturel, façonné par l'homme au cours de l'histoire, et que la confrontation à d'autres techniques, contemporaines ou non permet en même temps de relativiser le choix de telle ou telle technique et de faire, à nouveau, un réel travail mathématique pour tenter de comprendre un autre algorithme.

Pourquoi donc introduire **les calculatrices** à l'école primaire ? Comment un outil largement répandu et utilisé peut-il rester à la porte de l'école ? L'école ne doit pas se couper des évolutions en profondeur qui marquent certaines pratiques. Et il est de sa responsabilité d'apprendre aux élèves à utiliser correctement les outils disponibles. Il est possible, à la fois et dans une parfaite cohérence pédagogique, de calculer avec un boulier (pour mieux comprendre la numération décimale), en utilisant une technique usuelle et en ayant recours à une calculatrice (ou même à un tableur).

Fournir des calculatrices aux élèves, ce n'est pas leur laisser la possibilité de les utiliser en toutes occasions. C'est, au contraire, en faire des utilisateurs réflexifs et avertis, en particulier en leur inculquant que, si la machine effectue les calculs, elle ne peut pas décider à leur place des calculs pertinents pour résoudre un problème ! Peut-être aura-t-on moins de mauvaises surprises au collège si cette utilisation réfléchie est préparée très tôt à l'école primaire. Quand est-elle une outil pertinent ? Quand calcule-t-elle plus vite ? Dans quelles circonstances allège-t-elle le travail et dans quelles circonstances l'alourdit-elle ? Quand ne permet-elle pas d'obtenir le résultat attendu ?

Les calculatrices courantes n'affichent pas le quotient et le reste d'une division euclidienne. Comment les obtenir malgré tout avec la machine ? Vrai problème mathématique pour un élève de CM2. Que signifient les décimales affichées ? Sont-elles toutes affichées ? Cette dernière question mathématique relève davantage de la classe de Sixième. Comment calculer, avec une calculatrice, une multiplication dont le résultat dépasse la capacité d'affichage de la machine ? Là encore, l'élève est confronté à un problème mathématique qui exige à la fois compréhension de l'algorithme de la multiplication et du fonctionnement de sa machine.

Calcul et résolution de problèmes

Le calcul n'acquiert totalement son sens et sa légitimité qu'à partir du moment où il est un outil que les élèves sont capables d'utiliser pour traiter des problèmes sur les quantités ou sur les grandeurs. La résolution de problèmes est tout à la fois la source, le moyen et le but de l'enseignement du calcul. L'objectif est bien que chaque élève puisse, en utilisant ce qu'il en a appris et compris, investir l'ensemble de ses connaissances pour traiter les problèmes qui lui sont proposés.

Le problème suivant a été proposé lors des évaluations à l'entrée en Sixième en 1998.

⁴ Les adultes allemands ou anglo-saxons n'ont, par exemple, jamais appris à calculer une division sans poser les soustractions intermédiaires

Pour la fête de l'école, on veut recouvrir chaque table avec une bande de papier d'une longueur de 4 m.

Combien de tables pourra-t-on recouvrir avec un rouleau d'un longueur de 50 m?

Moins de 5 élèves sur 10 répondent correctement : 38,6 % répondent « 12 tables » auxquels on peut ajouter les 8,4 % qui répondent « 12 tables et demie ou 12,5 tables » et même les 2,3 % qui ont une démarche correcte et font une erreur de calcul. On sait que, pour certains, la difficulté principale réside dans une maîtrise insuffisante de la langue. Mais, pour beaucoup d'autres (une majorité), la difficulté se trouve bien dans l'utilisation des connaissances mathématiques. Et pourtant, si la réponse est unique, les solutions utilisables sont nombreuses :

- additionner 4 plusieurs fois pour s'approcher le plus possible de 50, puis dénombrer les 4 utilisés (en s'appuyant éventuellement sur un schéma);
- soustraire 4 plusieurs fois, à partir de 50 pour s'approcher le plus possible de 0, puis dénombrer les 4 utilisés ;
- essayer de multiplier 4 par des nombres pour s'approcher le plus possible de 50 ;
- diviser 50 par 4 et répondre en utilisant le quotient entier

La situation proposée ne présente pas de difficulté d'interprétation particulière, elle ne comporte que des nombres familiers aux élèves depuis plus de cinq ans et elle peut être résolue en utilisant des connaissances en calcul dont certaines ont été également travaillées depuis le cours préparatoire. De nombreux élèves qui ne répondent pas (un sur six) ou qui répondent incorrectement maîtrisent pourtant les calculs qu'il est possible d'utiliser pour répondre. C'est donc bien le traitement de la situation qui fait difficulté pour eux. Une analyse plus fine des cahiers montrent que beaucoup d'élèves se sont limités à poser une opération et à répondre par le résultat obtenu. L'idée n'est pas installée que, pour résoudre un problème, on peut faire autre chose que « trouver la bonne opération ». Pour eux, *chercher* est synonyme de *trouver*, et même de *trouver tout de suite*.

Le rôle de l'école, dans ce domaine, ne devrait pas se limiter à *enseigner la bonne solution* (dans le cas présent d'ailleurs la bonne solution en question consiste-t-elle à diviser 50 par 4 ou à chercher quel nombre multiplié par 4 permet de s'approcher le plus possible de 50 ?), mais aussi à *enseigner la diversité des solutions*. Ne vaut-il pas mieux qu'un élève, même à l'entrée en Sixième, utilise l'addition répétée pour résoudre ce problème particulier (parce que c'est comme cela qu'il traite la situation) plutôt que de faire n'importe quel calcul sur les nombres de l'énoncé, pensant que résoudre un problème avec deux nombres revient toujours à trouver la bonne opération ? Accepter et gérer les diverses solutions des élèves (les *solutions personnelles* et les *solutions expertes*, comme le précise le programme de l'école primaire), tel devrait également être le travail de l'enseignant, tout en essayant de les faire progresser vers l'utilisation des solutions expertes.

Le calcul et l'articulation école-collège

Deux opinions en partie contradictoires sont parfois entendues. La première affirme que, en Sixième il n'y a rien de nouveau, ce qui est source de démotivation pour les élèves. Le seconde regrette que des apprentissages qui jusque là relevaient de l'école primaire (la multiplication des décimaux, le quotient décimal de deux entiers ou d'un décimal par un entier, par exemple) soient maintenant laissés à la charge du collège. Ces choix doivent en effet être expliqués. Ils résultent de deux types de considérations.

-

Les connaissances mathématiques se construisent sur le long terme. Certains dénoncent, par exemple, le fait que, progressivement les programmes ont, par exemple, renoncé à enseigner la division aux enfants du cycle 2, alors que la division par 2 ou par 5 était autrefois envisagée dès le CP. Ils ont à la fois raison et tort. Formellement raison, parce que le mot « division » n'est pas utilisé au cycle 2 et qu'aucune technique particulière n'est mise en place. Fondamentalement tort, parce que l'enseignement de la division est bien envisagé depuis le début du cycle 2 (et même depuis la fin de l'école maternelle), puisque dès ce moment de la scolarité les élèves sont confrontés à des situations de partage ou de distribution qu'ils résolvent par des solutions personnelles qui évoluent en même temps que les connaissances élaborées par les élèves : dessin et dénombrement en maternelle et au début du CP, additions ou soustractions itérées et essais organisés de multiples dans la suite du cycle 2 et au début du cycle 3, division au cycle 3. C'est une autre progressivité des apprentissages qui est à l'œuvre, avec le souci d'asseoir le sens et la structuration des notions sur les expériences et les savoirs capitalisés antérieurement. De la même façon, dès le cycle 3, les élèves peuvent être confrontés à des problèmes pour lesquels le résultat attendu est par exemple le quotient décimal de deux entiers. Ils l'auront obtenu, à ce moment, par des procédures personnelles (essais organisés de produits, partage du reste transformé en dixièmes, puis en centièmes, par exemple) ou par utilisation d'une calculatrice s'ils ont reconnu que la division était l'opération pertinente pour ce problème. Sur la base de ces premières expériences, la notion de quotient décimal prendra plus sûrement sens lorsqu'elle sera étudiée plus systématiquement en Sixième. Le chemin le plus efficace pour accéder à un concept n'est pas nécessairement le plus court.

Plus que dans d'autres domaines, les connaissances mathématiques se construisent progressivement et certaines ne peuvent pas être mises en place avec succès si d'autres ne sont pas solidement installées. Une meilleure cohérence et une meilleure organisation des savoirs doivent donc être recherchées, notamment en traitant la question des articulations entre l'école et le collège, puis entre le collège et le lycée. Ainsi, la compréhension de la notion de quotient décimal suppose à la fois une bonne maîtrise de la notion de quotient (signification et calcul dans le cas des entiers) et de celle de nombre décimal (en particulier de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture à virgule).

Or, et ce n'est pas un constat récent, ces deux notions sont en cours d'appropriation à la fin de l'école primaire. Le problème évoqué plus haut en témoigne pour ce qu'on appelle habituellement le sens de la notion de quotient, tout comme le révèlent les résultats obtenus à l'entrée en Sixième pour le calcul de quotient dans des cas relativement simples : un élève sur quatre ne calcule pas correctement le quotient de 72 par 3 et plus d'un sur deux ne calcule pas correctement celui de 2 782 par 26. De la même façon, on sait qu'un nombre important d'élèves ne donnent pas une signification correcte à l'écriture à virgule des nombres décimaux.

Disposer de temps pour mieux construire, entraîner et asseoir ces connaissances paraît constituer une meilleure préparation à la compréhension et au calcul du quotient décimal qu'un entraînement trop précoce au calcul posé de ce quotient. D'autant plus que la notion de quotient (fractions et approximations décimales de quotients) est un des enjeux forts du programme de Sixième et qu'elle gagnerait sans doute à être envisagée sous ses différents aspects. Partir trop tôt et trop vite n'est pas le meilleur moyen d'être efficace.

Du côté de la géométrie et de la mesure

Cet article ne prétend pas à une étude exhaustive du nouveau programme. Les considérations relatives à l'apprentissage de la géométrie et de la mesure seront donc plus brèves.

Pendant longtemps, l'étude de la géométrie à l'école primaire n'a pas eu une place bien définie. Cet enseignement était essentiellement orienté vers une connaissance de quelques objets (figures planes et solides) nécessaire à l'application des formules relatives aux périmètres, aux aires et aux volumes et vers l'exécution de tracés précis. Aujourd'hui encore, on constate un relatif désintérêt des enseignants pour ce domaine, souvent relégué au samedi matin... Il s'agit aujourd'hui, pour l'école primaire, de mieux ancrer cet enseignement qui a une place importante au début du collège (environ la moitié du programme), en n'oubliant pas qu'il vise un double objectif : permettre à tous les élèves de maîtriser l'espace ordinaire (se situer, se déplacer, articuler différents points de vue, utiliser un plan...) et de s'approprier de premières notions géométriques nécessaires pour analyser des objets géométriques et agir sur eux (alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, milieu, axes de symétrie, angles, notamment). Au centre de cet enseignement, se trouvent quelques grandes catégories de problèmes (situer, reproduire, construire, décrire, représenter, comparer). Posés dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou dans celui de l'écran d'ordinateur, ils permettent de donner sens aux notions étudiées et au vocabulaire utilisé.

Du début de l'école primaire jusqu'au collège, l'élève enrichit sa « boîte à outils géométrique », d'abord limitée à l'œil et à la main, enrichie ensuite des instruments (règle, équerre, compas) et complétée au collège par les théorèmes. A chaque étape, il s'agit d'aider l'élève à s'approprier un nouveau « contrat géométrique » : le contrôle perceptif des propriétés laisse ainsi d'abord la place au contrôle instrumenté, puis au raisonnement déductif. On connaît la difficulté de ses ruptures successives pour certains élèves.

Déjà exploré par diverses recherches qui permettent de mieux en comprendre les enjeux et les difficultés, cet enseignement nécessite encore de nombreux travaux pour véritablement trouver sa place dans la culture de l'école primaire. En particulier, il est nécessaire de préciser dans quelle mesure, à ce niveau de la scolarité, la géométrie peut être enseignée comme « science de l'espace ordinaire » et pas seulement pour elle-même.

Jusqu'aux années 70, l'enseignement de la mesure à l'école primaire était marqué par l'apprentissage et l'utilisation des formules pour calculer le périmètre, l'aire ou le volume des figures et des solides classiques et par un travail sur les changements d'unités (conversions). Les difficultés de ce type d'apprentissage dont certains expriment aujourd'hui la nostalgie sont connues : pour un nombre important d'élèves les techniques apprises fonctionnent à vide. Les grandeurs sont souvent mal identifiées : confusion entre périmètre et aire, entre masse et volume... Les formules sont abusivement généralisées, ce qui témoigne du fait que les conditions de leur application ne sont pas maîtrisées : par exemple, pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on multiplie longueur par largeur. Le recours systématique au fameux « tableau de conversion » masque une méconnaissance des équivalences les plus fréquemment utilisées, comme 1 m = 100 cm ou 1 km = 1 000 m !

Le nouveau programme propose donc de mettre l'accent sur la compréhension des notions fondamentales (grandeurs, unités, évaluation de la mesure par report de l'unité, à l'aide d'un instrument ou par un calcul, ordre de grandeur) pour que l'élève puisse contrôler par le sens les connaissances qui seront mémorisées et les méthodes qui seront automatisées.

Pour conclure

Le nouveau programme pour l'école primaire est organisé en vue de l'acquisition de connaissances mieux ciblées, plus solides parce que bien comprises, structurées et situées dans la perspective des apprentissages futurs : les objectifs annoncés pour le calcul mental, dans une position centrale, en sont un exemple. Il propose que ces connaissances soient opératoires, c'est-à-dire que les élèves puissent les mobiliser pour traiter des problèmes « non mathématiques » comme des problèmes « mathématiques », en mobilisant toutes leurs ressources et non seulement celles qu'ils pensent attendues. Il est conçu pour que, dès leur plus jeune âge, les élèves soient confrontés à une pratique « mathématisante » : chercher, expliquer, argumenter, prouver, organiser... L'équilibre voulu entre ces différents éléments constitutifs d'une véritable culture mathématique qui, elle-même, doit trouver une place essentielle dans une culture scientifique en fait un programme ambitieux.